J. M. OTERO

Propiedades dinámicas de los modelos macroeconométricos: métodos de análisis y aplicaciones

Los modelos macroeconométricos fueron introducidos por Tinbergen (1939) con la finalidad de contrastar teorías y analizar ciclos económicos. Ante tales objetivos, las propiedades dinámicas de interés preferente eran aquellas que persisten a largo plazo cualesquiera que sean las condiciones iniciales (supuesta una situación exógena estacionaria). Estas propiedades dinámicas se estudian exhaustivamente haciendo uso del método clásico basado en la ecuación característica. Este método está desarrollado en la sección primera del presente trabajo.

Con el tiempo, los objetivos en la construcción de estos modelos se desplazaron de la teoría a las aplicaciones. Primero la finalidad se centró en hacer predicciones y, más tarde, en la simulación de los efectos de medidas alternativas de política económica. Este cambio influyó en la perspectiva del análisis de las propiedades dinámicas; el interés se desplazó desde la componente característica básica hacia la influencia de las condiciones iniciales y de la componente de los estímulos exógenos. Así nació con Goldberger (1959) un nuevo instrumento de análisis: *los multiplicadores*, cuya aplicabilidad en política económica es directa. Los conceptos correspondientes se introducen en la sección tercera.

Los enfoques anteriores fueron concebidos para modelos lineales, mientras que la mayoría de los modelos macroeconómicos que se vienen usando son *no lineales*. Estos modelos presentan una problemática especial que brevemente expondremos en la sección cuarta.

Actualmente, gracias a las enormes posibilidades de cálculo que ofrecen los ordenadores, la solución de sistemas dinámicos, ya sean lineales o no, se puede abordar por métodos de *simulación numérica*. Esto se consigue sin necesidad de realizar manipulaciones algebraicas previas. Estos métodos presentan diversas variantes y su campo de aplicabilidad es muy amplio. Los conceptos básicos sobre simulación se introducen en la sección quinta, en donde incluimos también algunos comentarios sobre las aplicaciones en Política Económica, Historia y Econometría.

La influencia de los términos estocásticos en las propiedades cíclicas de los sistemas dinámicos se comenzó a estudiar en fechas bien tempranas. Posteriormente, las facilidades para realizar simulaciones con el ordenador, así como la incorporación de las técnicas espectrales a la econometría, han hecho resurgir el interés por el análisis cíclico. De ello hacemos un breve comentario en la sección segunda.

El presente trabajo pretende llenar una laguna de la que adolecen los libros de texto de Econometría (una excepción es Klein (1974)), tradicionalmente centrados en los problemas de inferencia estadística que plantean los modelos econométricos.

Adicionalmente, creemos que con esta publicación se cubre parte de un vacío existente en la literatura económica española.

I. Propiedades dinámicas de los modelos lineales. El enfoque clásico

En esta sección vamos a exponer el enfoque algebraico clásico para el estudio de las propiedades dinámicas de los modelos macroeconómicos lineales. La linealidad se entiende tanto en relación a los parámetros del modelo como a las variables endógenas.

Sea el modelo lineal multiecuacional completo

$$\boldsymbol{B}_0\, \boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{B}_1\, \boldsymbol{y}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{B}_r\, \boldsymbol{y}_{t-r} + \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad [1]$$

en donde,

$\boldsymbol{y}_{t-\tau}$ para $\tau = 0, 1, 2, \dots, r$, son los vectores de las observaciones contemporáneas de las G variables endógenas con los correspondientes retardos τ. Así, por ejemplo $\boldsymbol{Y}'_t = [y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{Gt}]$

$\boldsymbol{x}_t$ el vector de las observaciones contemporáneas de las variables exógenas.

$\boldsymbol{B}_\tau$ la matriz $G \times G$ de los coeficientes estructurales de las variables endógenas retardadas τ períodos.

$\boldsymbol{A}$ la matriz $G \times K$ de los coeficientes estructurales de las variables exógenas.

$\boldsymbol{\varepsilon}_t$ un vector de G perturbaciones aleatorias contemporáneas.

Suponemos que el sistema es completo, es decir, que $|\boldsymbol{B}_0| \neq 0$

De la ecuación [1] puede obtenerse

$$\boldsymbol{y}_t = -\, (\boldsymbol{B}_0^{-1} (\boldsymbol{B}_1\, \boldsymbol{y}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{B}_r\, \boldsymbol{y}_{t-r} + \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}_t) + \boldsymbol{B}_0^{-1}\, \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad [2]$$

que es la denominada *forma reducida* del modelo. Como es sabido, ésta es la expresión utilizada para las predicciones.

Para estudiar las propiedades dinámicas, se acude a la denominada *forma final* de Tinbergen (1939). Para obtenerla simbólicamente en nuestro sistema, haremos uso del operador de retardos R, tal que $R^n Z_t = Z_{t-n}$.
Sea

$$\boldsymbol{B}(R) = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1 R + \ldots + \boldsymbol{B}_r R^r \qquad [3]$$

La ecuación [1] puede escribirse simbólicamente así

$$\boldsymbol{B}(R)\, \boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad [4]$$

y, de ahí,

$$\boldsymbol{y}_t = -\, [\boldsymbol{B}(R)]^{-1} \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{B}(R)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad [5]$$

Este sistema, que expresa las variables endógenas exclusivamente en función de las exógenas, es el que Theil y Boote (1962) denominan *forma final*.

El segundo miembro de [5] contiene infinitos términos retardados de $\boldsymbol{x}_t$. A este sistema nos referiremos más adelante en la sección tercera.

La *forma final*, en el sentido de Tinbergen (1939) y Goldberger (1959), presenta cada variable endógena del sistema en función de las exógenas y de *sus propios* valores retardados. Ésta es la que se pretende obtener.

Siendo r finito, la expresión $[\boldsymbol{B}(R)]^{-1}\, \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}_t$ no permite, en general, una representación autorregresiva con un número de términos finito. Sobre esta ecuación volveremos más adelante.

Sea $[\mathrm{Adj}\, \boldsymbol{B}(R)]$ la matriz adjunta de $\boldsymbol{B}(R)$. La ecuación [5] puede escribirse así

$$\boldsymbol{y}_t = -\frac{[\mathrm{Adj}\, \boldsymbol{B}(R)]}{|\boldsymbol{B}(R)|} \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}_t + [\boldsymbol{B}(R)]^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad [6]$$

o bien

$$|\boldsymbol{B}(R)|\, \boldsymbol{y}_t = -\, [\mathrm{Adj}\ \boldsymbol{B}(R)]\ \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}_t + [\mathrm{Adj}\ \boldsymbol{B}(R)]\, \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad [7]$$

que constituye la *forma final* buscada.

Como bien destaca Wallis (1973, p. 123), del sistema anterior se desprende:

a) Cada ecuación final tiene la misma estructura autorregresiva, dada por el polinomio $|\boldsymbol{B}(R)|$, cuyo grado m, es como máximo Gr. Para que $m = Gr$ hace falta que todas las variables aparezcan con un retardo de r períodos, cada una en una ecuación diferente del sistema estructural [1].

b) Las variables exógenas aparecen con retardos de estructura temporal finita que varía, en general, de ecuación a ecuación.

c) Los términos de perturbación son medias móviles de las perturbaciones estructurales y difieren de ecuación a ecuación.

Prescindiendo por ahora del término perturbación, cada ecuación de [7] proporciona implícitamente la *trayectoria temporal* de una variable endógena en función de las variables exógenas.

La trayectoria temporal de cada respuesta a los estímulos exógenos está formada por dos componentes, que en términos matemáticos son:

a) La solución homogénea (componente de propagación o componente característica básica).

b) La solución particular (componente de impulso o componente de los estímulos exógenos).

La adición de ambas soluciones constituye la solución completa del sistema. La acertada terminología de componentes de propagación y de impulso se debe a Frisch (1933).

En la terminología de Goldberger (1959, p. 109), a quien seguiremos en esta exposición, la *componente característica básica* de la solución completa refleja las respuestas características inherentes al sistema, y se deduce de la solución básica de la «ecuación característica homogénea»

$$\left|\boldsymbol{B}_0 \lambda^r + \boldsymbol{B}_1 \lambda^{r-1} + \ldots + \boldsymbol{B}_{r-1} \lambda + \boldsymbol{B}_r\right| = 0 \qquad [8]$$

El examen de las m raíces de la ecuación anterior permite analizar las «propiedades dinámicas características del sistema». Éstas son las propiedades que prevalecen en el sistema después de transcurrido un tiempo indefinido siguiendo a un cambio exógeno, cualesquiera que fuesen las condiciones iniciales.

La componente característica básica $\hat{\boldsymbol{y}}_t$ puede escribirse en notación matricial

$$\hat{\boldsymbol{y}}_t = \boldsymbol{C} \lambda^t \qquad [9]$$

en donde $\boldsymbol{C}$ es una matriz de constantes arbitrarias que se determinan por las condiciones iniciales, y λ es un vector columna formado por las m raíces de [8].

Las raíces referidas definen las características de la respuesta inherente al sistema en términos de estabilidad, periodicidad y amortiguamiento, en la forma siguiente: El sistema es estable (amortiguado) si el valor absoluto de cada una de las raíces es inferior a la unidad, e inestable (explosivo) en el caso contrario. Cada raíz real positiva contribuye en la trayectoria temporal con una componente monotónica; cada raíz negativa lo hace con una componente que crea «dientes de sierra». Cada pareja de raíces complejas conjugadas, $\lambda_i = \alpha + \beta_i$, $\lambda_j = \alpha - \beta_i$ crea una componente oscilatoria (cíclica) de período $360/\theta$, en donde $\theta = \text{arc tg } (\beta/\alpha)$ y de amplitud ρ^t siendo $\rho = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$.

Es fundamental observar que la ecuación característica es común a todas las variables endógenas del modelo. De aquí que podamos hablar de características inherentes al *sistema*.

La componente de los *estímulos exógenos* viene determinada por la solución particular. Ésta depende, evidentemente, de la trayectoria temporal de las variables exógenas. En el caso particular de que éstas permanezcan estacionarias a lo largo del tiempo, la solución particular se identifica como *solución de equilibrio*. (El concepto de equilibrio se puede aplicar al caso en que las variables exógenas se suponen función lineal del tiempo o presentan una tendencia exponencial; en este caso suele hablarse de equilibrio móvil o dinámico.)

La relación entre los valores de equilibrio a largo plazo, $\bar{\boldsymbol{x}}$ e $\bar{\boldsymbol{y}}$ se halla mediante [7]. Por definición de equilibrio a largo plazo, tenemos:

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}_{t-1} = \boldsymbol{x}_{t-2} = \ldots = \bar{\boldsymbol{x}}$$
$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{y}_{t-1} = \boldsymbol{y}_{t-2} = \ldots = \bar{\boldsymbol{y}}$$

Luego para calcular $\bar{\boldsymbol{y}}$ basta hacer en [7] el artificio de igualar R a la unidad, quedando

$$|\boldsymbol{B}(1)|\,\bar{\boldsymbol{y}} = -\,[\text{Adj } \boldsymbol{B}(1)]\,\boldsymbol{A}\,\bar{\boldsymbol{x}} \qquad [10]$$

La solución completa del sistema es, en este caso,

$$\boldsymbol{y}_t = \hat{\boldsymbol{y}}_t + \bar{\boldsymbol{y}} \qquad [11]$$

La solución general del sistema dinámico [1] para cualquier trayectoria temporal de las variables exógenas, puede escribirse *simbólicamente* [1]

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{C}\,\lambda^t - \frac{[\text{Adj } \boldsymbol{B}(R)]}{|\boldsymbol{B}(R)|}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}_t + [\boldsymbol{B}(R)]^{-1}\,\boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad [12]$$

EJEMPLO: Para clarificar este enfoque y mostrar sus posibilidades, haremos uso del modelo de Hicks a modo de ejemplo:

$$\begin{aligned} C_t &= \alpha\, Y_{t-1} + \varepsilon_{1t} \\ I_t &= \nu\, (Y_{t-1} - Y_{t-2}) + \varepsilon_{2t} \\ Y_t &= C_t + I_t + J_t \end{aligned}$$

1. No hay contradicción entre [12] y [6] porque como puede verse más adelante en el ejemplo, el segundo término del segundo miembro de [12] contiene un número indefinido de sumandos, y cuando el origen del tiempo se supone indefinidamente alejado en el pasado, $\lambda^t \to 0$.

en donde,
C = consumo
I = inversión inducida
Y = renta nacional
J = inversión autónoma (exógena)

En este modelo tenemos que

$$\boldsymbol{y}_t = \begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{y}_{t-1} = \begin{bmatrix} C_{t-1} \\ I_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{y}_{t-2} = \begin{bmatrix} C_{t-2} \\ I_{t-2} \\ Y_{t-2} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}_t = J_t$$

$$\boldsymbol{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & -\nu \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

De aquí tenemos que

$$\boldsymbol{B}(R) = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1 R + \boldsymbol{B}_2 R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha R \\ 0 & 1 & -\nu(R - R^2) \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

por tanto,

$$|\boldsymbol{B}(R)| = 1 - (\alpha + \nu) R + \nu R^2$$

$$\text{y } [\text{Adj } \boldsymbol{B}(R)] = \begin{bmatrix} 1 - \nu(R - R^2) & \alpha R & \alpha R \\ \nu(R - R^2) & 1 - \alpha R & \nu(R - R^2) \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Así pues,

$$[\text{Adj } \boldsymbol{B}(R)]\, \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -\alpha R \\ -\nu(R - R^2) \\ -1 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones finales es

$$[1 - (\alpha + \nu) R + \gamma R^2] \begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha R \\ \nu(R - R^2) \\ 1 \end{bmatrix} J_t + \boldsymbol{v}_t$$

o, en otra forma,

$$C_t - (\alpha + \nu) C_{t-1} + \nu C_{t-2} = \alpha J_{t-1} + v_{1t} \quad [13]$$

$$I_t - (\alpha + \nu) I_{t-1} + \nu I_{t-2} = \nu(J_{t-1} - J_{t-2}) + v_{2t} \quad [14]$$

$$Y_t - (\alpha + \nu) Y_{t-1} + \nu Y_{t-2} = J_t + v_{3t} \quad [15]$$

Las propiedades dinámicas características del modelo se pueden estudiar acudiendo a la ecuación característica

$$\lambda^2 - (\alpha + \nu) \lambda + \nu = 0 \quad [16]$$

cuyas raíces son

$$\lambda_1 = \frac{(\alpha + \nu) + \sqrt{(\alpha + \nu)^2 - 4\nu}}{2}$$

y

$$\lambda_2 = \frac{(\alpha + \nu) - \sqrt{(\alpha + \nu)^2 - 4\nu}}{2}$$

La respuesta característica del sistema depende de los valores de las raíces. Como éstas dependen, a su vez, de los parámetros estructurales α y ν, es fácil asociar cualquier combinación de tales parámetros con un tipo concreto de respuesta cualitativa del sistema (amortiguada monotónica, amortiguada oscilatoria, explosiva monotónica o explosiva oscilatoria).

Admitiendo *a priori* que $\alpha > 0$ y $\nu > 0$, tal y como hace esperar la teoría, la existencia de ciclos vendrá condicionada por las raíces imaginarias. Para esto es necesario que

$$4\nu > (\alpha + \nu)^2$$

o bien

$$(1 - \sqrt{1 - \alpha})^2 < \nu < (1 + \sqrt{1 - \alpha})^2$$

Por otra parte, si el sistema es amortiguado $\lambda_1 \lambda_2 < 1$, es decir, $\nu < 1$. En la figura aparecen representados los casos posibles según las parejas de valores α y ν.

Con modelos de un número de ecuaciones algo superior, es también factible esta clase de análisis exhaustivo que permite asociar un tipo de comportamiento a cada posible combinación de valores de los parámetros estruc-

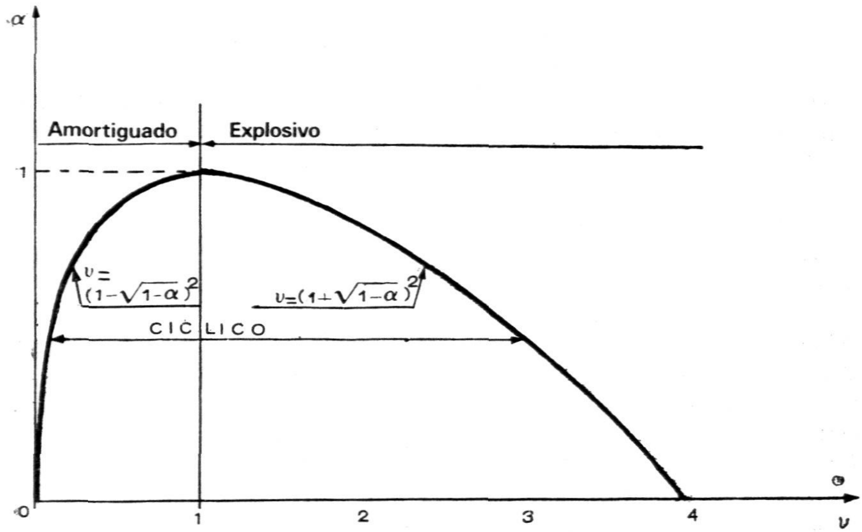

FIG. 1

turales. Pero con modelos de elevado número de ecuaciones hay que contentarse con obtener la respuesta característica básica correspondiente a un conjunto particular de valores de los parámetros estructurales, previamente obtenido mediante algún procedimiento de estimación. Con equipos de cálculo modernos Howrey (1969) ha realizado los cálculos correspondientes para $Gr = 43$.

El enfoque clásico hasta ahora presentado centra la atención en la componente característica básica, es decir, en el estudio de los problemas de propagación. Éste era el interés típico en los tiempos pioneros de los modelos cíclicos de Tinbergen.

Por otra parte, en toda la discusión precedente se ha ignorado la posible influencia del término de perturbación sobre las propiedades dinámicas del sistema.

Además, la discusión anterior se ha referido a los modelos lineales en los parámetros y en las variables endógenas, cuando la mayoría de los modelos econométricos actuales son no lineales en las variables.

El enfoque moderno del estudio de las propiedades dinámicas de los modelos se realiza mediante experimentos de simulación. Éstos, cuando se refieren a la influencia del término de perturbación, se denominan simulación estocástica. Cuando la simulación se centra en los problemas de impulso y propagación se denomina numérica.

II. Simulación estocástica

En la sección precedente se ha ignorado la influencia del término de perturbación sobre las propiedades dinámicas del sistema [1].

Sin embargo, el término estocástico produce un efecto de gran importancia. Ya Slutsky en 1937 demostró que las medias móviles de series aleatorias tienden a mostrar propiedades cíclicas.

Adelman y Adelman (1959) investigaron experimentalmente el influjo del término estocástico sobre las propiedades dinámicas del modelo de Klein y Goldberger (1955). Para ello comenzaron utilizando una versión linealizada del mismo con el fin de evitar los problemas que veremos más adelante. Luego añadieron a las ecuaciones del sistema estructural estimando números aleatorios previamente generados de acuerdo con las características estimadas de las perturbaciones correspondientes. A continuación se generaron valores de las variables exógenas sometidas a una tendencia lineal. Con todos estos datos resolvieron el sistema de 25 ecuaciones con relación a las variables endógenas.

La interesante conclusión de los Adelman es que cuando se tiene así en cuenta la influencia del término de perturbación, las variables endógenas muestran ciclos de cuatro años de duración por término medio en torno a las tendencias lineales. Lo más curioso es que estos ciclos poseen propiedades análogas a las que se han atribuido a la economía estadounidense en base a otros estudios económicos cuantitativos completamente diferentes.

Otra forma de enfocar la simulación estocástica es a través del análisis espectral. Para ello hay que estimar la representación espectral del término de perturbación en [12]. Howrey (1971) ha utilizado este enfoque con el modelo de Klein-Goldberger procediendo previamente a efectuar una aproximación lineal del sistema. Aun cuando los métodos son diferentes, los resultados así obtenidos concuerdan con los de los Adelman.

III. Multiplicadores y modelos lineales

El concepto de multiplicador arranca de Keynes, aunque éste lo utilizó únicamente en un sentido estático. La terminología de los multiplicadores en modelos dinámicos procede de Goldberger (1959).

Por *multiplicador de impacto* se entiende el efecto que un cambio unitario en la variable exógena provoca en otra endógena en el *mismo período* de tiempo en que se produce el cambio.

Si admitimos para mayor claridad que en el vector $\boldsymbol{x}_t$ no figuran valores retardados de las variables exógenas, en el sistema de ecuaciones reducidas [2], la matriz $-\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{A}$ contiene a todos los multiplicadores de impacto. Sea

$$\boldsymbol{\Pi} = -\boldsymbol{B}_0^{-1}\boldsymbol{A}$$

El elemento π_{ij} de $\mathbf{\Pi}$ es el multiplicador de impacto de X_j sobre Y_i. Evidentemente

$$\pi_{ij} = \frac{\Delta\ Y_{it}}{\Delta\ X_{jt}} \qquad [17]$$

En política económica interesa conocer, además del impacto o efecto en el mismo período, las incidencias de los cambios exógenos sobre las variables endógenas a lo largo del tiempo. A estos efectos temporales se les denomina *multiplicadores intermedios.*[2] La ecuación [5], que expresa a las variables endógenas exclusivamente en función de las exógenas, contiene a tales multiplicadores.

Vamos a ejemplificar lo dicho para el caso más simple de que el retardo máximo en las variables endógenas sea de un período. Es decir,

$$\boldsymbol{B}(R) = \boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1\, R \qquad [18]$$

En este caso, [5] se puede escribir así

$$\boldsymbol{y}_t = -\ [\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1\, R]^{-1}\, \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{B}(R)^{-1}\, \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

o bien,

$$\boldsymbol{y}_t = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}_1\, R]^{-1}\, \boldsymbol{\Pi}_2\, \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{B}(R)^{-1}\, \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad [19]$$

en donde,

$$\boldsymbol{\Pi}_1 = -\, \boldsymbol{B}_0^{-1}\, \boldsymbol{B}_1 \qquad [20]$$

y

$$\boldsymbol{\Pi}_2 = -\, \boldsymbol{B}_0^{-1}\, \boldsymbol{A} \qquad [21]$$

Admitamos que $\boldsymbol{\Pi}_1^n$ converge a la matriz nula cuando n crece indefinidamente. La condición necesaria y suficiente para ello es que todas las raíces latentes de $\boldsymbol{\Pi}_1$ sean inferiores a la unidad en valor absoluto.

Haciendo uso de la igualdad

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}_1\, R)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}_1^i\, \boldsymbol{R}^i \qquad [22]$$

2. En inglés «interim multipliers». «Interim», como adjetivo, significa en inglés «perteneciente a, ocurrido o realizado en un período intermedio», lo que justifica nuestra traducción. (*Webster Universal Dictionnary;* Harver Educational Services, INC., Nueva York, 1970.)

la ecuación [19] puede escribirse así

$$\boldsymbol{y}_t = \sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}_1^i \boldsymbol{\Pi}_2 \boldsymbol{x}_{t-i} + [\boldsymbol{B}(R)]^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

Es decir,

$$\boldsymbol{y}_t = \boldsymbol{\Pi}_2 \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{\Pi}_1 \boldsymbol{\Pi}_2 \boldsymbol{x}_{t-1} + \boldsymbol{\Pi}_1^2 \boldsymbol{\Pi}_2 \boldsymbol{x}_{t-2} + \ldots + [\boldsymbol{B}(R)]^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t \qquad [23]$$

Así pues, las respuestas retardadas a estímulos transitorios, s períodos después (o multiplicadores intermedios de grado s) vienen recogidos en la matriz

$$\boldsymbol{\Pi}_1^s \boldsymbol{\Pi}_2 \qquad [24]$$

El elemento *i-j*-ésimo de esa matriz representa el multiplicador intermedio de grado s de X_j sobre Y_i.

La matriz

$$\sum_{i=0}^{s} \boldsymbol{\Pi}_1^i \boldsymbol{\Pi}_2 \qquad [25]$$

recoge los efectos acumulados de las reacciones endógenas con un retardo de s períodos. Por último, los elementos de la matriz

$$\sum_{i=0}^{\infty} \boldsymbol{\Pi}_1^i \boldsymbol{\Pi}_2 = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}_1)^{-1} \boldsymbol{\Pi}_2 \qquad [26]$$

se denominan *multiplicadores totales,* porque evidentemente representan los efectos acumulados a largo plazo.

Los conceptos anteriores son, desde luego, aplicables a un modelo uniecuacional. En efecto, en el modelo con un retardo distribuido

$$Y_t = \alpha_0 X_t + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \ldots \qquad [27]$$

α_0 es el multiplicador de impacto (derivada a corto plazo de Y respecto de X)

$\alpha_1 \ldots \alpha_s$, multiplicadores intermedios.

$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i$ es el multiplicador total (derivada a largo plazo de Y respecto de X).

La *trayectoria de ajuste* de la variable Y puede describirse mediante la serie

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \qquad s = 1, 2, \ldots n \ldots$$

Usualmente es suficiente que s esté comprendido entre 10 y 20. Varios ejemplos numéricos de esta forma representan la trayectoria de ajuste y aparecen en Otero (1974).

Se ha supuesto que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{\Pi}_1^n = 0$$

Esto significa que la respuesta del sistema es estable. La naturaleza de las raíces latentes de $\mathbf{\Pi}_1$ determina la forma y velocidad del ajuste a una situación de equilibrio. Estas raíces latentes coinciden con las soluciones de la correspondiente ecuación característica del sistema, obtenida en la forma indicada en la sección anterior. Además, el modelo general [1] se puede escribir en la forma [19] redefiniendo para ello adecuadamente los vectores $\boldsymbol{y}_t$ e $\boldsymbol{y}_{t-1}$. Planteando, entonces, la obtención de las raíces latentes de la matriz que ocuparía el lugar de $\mathbf{\Pi}_1$ en [19], se obtiene la ecuación característica [8]. (Véase Glaister (1972), capítulo 9.° o Wallis (1973), pp. 125-126.)

Lo dicho muestra la generalidad del enfoque de los multiplicadores.

Hasta ahora hemos concebido al multiplicador como un instrumento para el análisis de las propiedades dinámicas de los modelos lineales. Pero salta a la vista el interés intrínseco del concepto en política económica.

Algunos ejemplos simples del uso de los multiplicadores en política económica figuran en Suits (1962).

Una gran ventaja de los multiplicadores respecto al enfoque de la sección anterior es que pueden obtenerse en una forma bastante simple cuya generalización a modelos no lineales es directa. Las fórmulas que hemos visto son más bien de definición que para el cálculo ordinario. Obsérvese que si en la ecuación [27], por ejemplo, suponemos un cambio exógeno transitorio y, prescindiendo del término constante si lo hubiera, calculamos los valores de Y, éstos coinciden con los multiplicadores. En efecto, supongamos

$$X_{-1} = X_{-2} = \ldots = 0; \; X_0 = 1; \; X_1 = X_2 = \ldots = 0$$
$$Y_{-1} = Y_{-2} = \ldots = 0 \text{ (si figuraran en la ecuación)}$$

Entonces, resulta

$$Y_0 = \alpha_0, \quad Y_1 = \alpha_1, \quad Y_2 = \alpha_2, \ldots$$

Este procedimiento proporciona gran flexibilidad al cálculo de los multiplicadores, pues se pueden obtener partiendo tanto de la forma de retardo retribuido como de la forma autorregresiva del modelo.

En modelos multiecuacionales puede utilizarse un procedimiento análogo. En el ejemplo de la sección anterior, podemos obtener los multiplicadores de la inversión autónoma, J, sobre la renta, Y, en la forma siguiente. Hagamos, en la ecuación, [15]

$$J_{-1} = 0; \quad J_0 = 1; \quad J_1 = J_2 = \ldots = 0$$
$$Y_{-1} = 0; \quad Y_{-2} = 0$$

Así resulta,

$Y_0 = 1$ Multiplicador de impacto

$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = \alpha + \nu \\ \cdots\cdots\cdots \\ Y_s = (\alpha + \nu)Y_{s-1} - \nu Y_{s-2} \end{array}\right\} \text{Multiplicadores intermedios}$$

El multiplicador total se consigue calculando el coeficiente de J después de hacer en [15]

$$Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2} = \bar{Y};\ J_t = \bar{J}$$

como corresponde a una situación de equilibrio a largo plazo. Y así,

$$\frac{1}{1 - \alpha} = \text{multiplicador total}$$

Estos multiplicadores, a los que nos venimos refiriendo, se denominan de *equilibrio* porque describen las trayectorias temporales de las reacciones entre dos situaciones de equilibrio (*trayectorias de ajuste*) ante un cambio exógeno unitario. Tales multiplicadores proporcionan una información análoga a la que ofrece la ecuación característica para unas condiciones iniciales de equilibrio.

Cuando las condiciones iniciales no son de equilibrio, como sucede en la realidad, la respuesta a una medida de política económica estará dominada durante los primeros períodos por las condiciones iniciales, aun cuando a largo plazo prevalezca la respuesta característica (esto puede verse claramente en la ecuación [11]). Como puso de manifiesto Christ (1956) «... es al menos tan importante el estudio de los dos o tres primeros años (períodos) de una trayectoria temporal como el de sus últimas etapas».

La flexibilidad del enfoque de los multiplicadores para resolver este problema es clara. Para conocer el efecto de las condiciones iniciales en los primeros períodos que siguen al cambio, basta con ampliar el concepto de multiplicador y modificar adecuadamente el procedimiento de cálculo antes indicado. Ahora haremos uso de una solución «control» en lugar de igualar a cero los valores inciales de todas las variables. Esta solución control se refiere frecuentemente a valores reales observados. Luego se introduce en la forma conocida un cambio unitario transitorio en la variable exógena de interés y se calcula como antes la distribución temporal del efecto del cambio sobre cada variable endógena. Haciendo uso de medios de cálculo adecuados no es necesario acudir al sistema de ecuaciones finales, ni al de ecuaciones reducidas; puede operarse directamente con el sistema estructural.

En la forma que acabamos de describir estudió Goldberger (1959) los multiplicadores de una aproximación lineal del modelo de Klein-Goldberger.

Como ya hemos mencionado anteriormente, se puede operar directamente con el sistema estructural, con lo que resulta innecesario manipular algebraicamente el modelo. La ventaja de ello es evidente cuando se opera con modelos de gran número de ecuaciones, cuyo uso en macroeconomía es creciente.

Pero donde la gran flexibilidad del análisis de los multiplicadores resulta decisiva es en el estudio de las propiedades dinámicas y simulación de políticas con modelos no lineales, pues en estos modelos no es posible un enfoque algebraico que permita combinar en forma simple las componentes de impulso y de propagación.

IV. Modelos no lineales

Hasta ahora nos hemos referido solamente a modelos lineales tanto en los parámetros como en las variables endógenas.

Sin embargo, la mayor parte de los modelos macroeconométricos son lineales en los parámetros pero no lo son en las variables. Esta clase de no linealidad no constituye un problema cuando de lo que se trata es de estimar (siempre que se utilicen a tal efecto métodos tales como los mínimos cuadrados bietápicos, que operan ecuación por ecuación).

Muchos de los problemas que plantean los modelos no lineales en las variables endógenas se derivan de la carencia de una forma reducida.

Las no linealidades en las variables que usualmente aparecen en los modelos econométricos son de dos clases:

a) Las que resultan de un proceso de linealización del modelo en los parámetros mediante una transformación logarítmica. Un caso típico es el de la función de Cobb-Douglas.

b) La aparición de algún cociente o producto de dos variables que luego están separadas en otra ecuación. Esto ocurre típicamente con las variables que representan índices de precios.

Siguiendo la clara exposición de K. F. Wallis (1973, p. 114), supongamos que algunas variables Y_i, Y_j, Y_k aparecen también en la forma Y_i/Y_j, Y_iY_j y $\log Y_k$. En este caso, el vector Y_t contiene más elementos que variables endógenas (y ecuaciones). Evidentemente, no existe una forma reducida lineal general. Si intentamos tratar las variables separadas añadiendo identidades tales como $Y' = Y_i/Y_j$, las expresiones de la forma reducida no serán internamente consistentes. Por ejemplo, dadas la variables exógenas, la «forma reducida» arrojará unos valores para Y_i e Y_j que divididos entre sí no serán, en general, iguales a los que se obtienen para Y'.

La no linealidad afecta evidentemente a aquellas aplicaciones de los modelos que hacen uso de la forma reducida, tal como la predicción.

En sistemas no lineales no es ya posible superponer de una forma simple las componentes de impulso y de propagación, por lo que no se puede llevar a cabo el enfoque algebraico visto en la sección primera de este artículo.

El concepto de multiplicador tal y como se expuso, tampoco goza de iguales características en modelos no lineales. En un modelo lineal, el cociente

$$\frac{\Delta Y_{it}}{\Delta X_{jt}} = \pi_{ij}$$

es evidentemente una cantidad independiente de los valores de la variable y de la amplitud del cambio exógeno ΔX_{jt}. Este resultado ya no continúa siendo válido con modelos no lineales. El efecto de un cambio exógeno unitario sobre las variables endógenas del sistema depende de los valores de las variables. *Los multiplicadores dejan de ser constantes, dependiendo de los diferentes estados de la economía.*

Sin embargo, en análisis de política económica aún sigue siendo interesante conocer las respuestas a estímulos exógenos, aunque aquéllas hayan de venir ya referidas a una situación «control».

Se acude, así, a generalizaciones del concepto de multiplicador y para la estimación de tales multiplicadores se utilizan métodos de simulación numérica.

V. Simulación numérica. Concepto y aplicaciones

Volvemos al sistema estructural [1] suprimiendo la hipótesis restrictiva de linealidad en las variables endógenas. Para mayor claridad omitimos el término de perturbación, quedando

$$\boldsymbol{B}_0\, \boldsymbol{y}_t + \boldsymbol{B}_1\, \boldsymbol{y}_{t-1} + \ldots + \boldsymbol{B}_r\, \boldsymbol{y}_{t-r} + \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}_t = 0 \qquad [28]$$

en donde algunos de los elementos de $\boldsymbol{y}_t$ pueden ser funciones no lineales de otros. Si se poseen estimaciones de todos los coeficientes estructurales, es posible obtener la solución de los valores de las variables endógenas contenidas en $\boldsymbol{y}_t$ dadas las condiciones iniciales $\boldsymbol{y}_{t-1} \ldots \boldsymbol{y}_{t-r}$, y el vector de las variables exógenas $\boldsymbol{x}_t$. Para ello se procede mediante métodos numéricos. El ordenador explora por métodos iterativos valores de las variables endógenas que satisfagan la ecuación anterior con un grado de exactitud preestablecido.

Klein (1974, p. 240), recomienda el método iterativo de Gauss-Seidel de acuerdo con los medios de cálculo modernos. El trabajo de Evans (1969, *a*) y el libro de Klein y Evans (1969) proporcionan descripciones completas del método de Gauss-Seidel. Una descripción sencilla del mismo puede verse en Wynn y Holden (1974). Otro método iterativo que se ha utilizado con los modelos Wharton EFU y Brookings es el método de Newton.

De la misma forma en que puede calcularse $\boldsymbol{y}_t$ es posible, procediendo etapa a etapa, obtener

$$\boldsymbol{y}_{t+1}, \boldsymbol{y}_{t+2}, \ldots, \boldsymbol{y}_{t+s}$$

Para ello es necesario conocer, junto a los datos ya referidos, los vectores de datos de las variables exógenas

$$\boldsymbol{x}_{t+1}, \boldsymbol{x}_{t+2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{t+s}$$

Para resolver el sistema en $\boldsymbol{y}_{t+1}$ se hará uso del vector $\boldsymbol{y}_t$, previamente obtenido en la etapa anterior, y así sucesivamente.

A esta forma de resolver sistemas dinámicos se la denomina simulación numérica.

Haciendo uso de estos métodos se estudian modernamente las propiedades dinámicas de los macromodelos.

Supongamos conocidas varias series de valores de las variables exógenas, que van a constituir los datos para obtener una solución base, denominada solución «control»,

$$\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{x}_{t+1}, \boldsymbol{x}_{t+2}, \ldots, \boldsymbol{x}_{t+s}$$

Es típico que esos valores se tomen de la realidad, ya sea perteneciendo al período muestral o a otro período posterior. Haciendo uso de los métodos antes expuestos se calculan

$$\boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{y}_{t+1}, \boldsymbol{y}_{t+2}, \ldots, \boldsymbol{y}_{t+s}$$

Estos conjuntos de valores constituyen la denominada solución «control». Para un análisis a largo plazo s se toma entre 10 y 20 años. A continuación se repiten los cálculos, pero introduciendo previamente una perturbación en la variable exógena de interés. Tomando, por ejemplo, $X_{kt} + \delta$, en lugar X_{kt}' se calculan las nuevas series,

$$\boldsymbol{y}_t^*, \boldsymbol{y}_{t+1}^*, \boldsymbol{y}_{t+2}^*, \ldots, \boldsymbol{y}_{t+s}^*$$

Los *multiplicadores dinámicos* se estiman, entonces, mediante las expresiones

$$\frac{Y_{i,\ t+j}^* - Y_{i,\ t+j}}{\delta}$$

en donde el subíndice i se refiere a cada una de las G variables endógenas y el j a los $s + 1$ períodos del análisis.

Por tratarse de modelos no lineales, los multiplicadores han de venir referidos a la solución control. El tamaño de la perturbación δ también influye en los valores de los multiplicadores, pero este problema no parece serio en la práctica.

La clase de cambio exógeno simple que hemos considerado es el que se utiliza para estimar los multiplicadores convencionales. Así, por ejemplo, ha calculado Evans (1969*b*) para Estados Unidos los multiplicadores de un presupuesto equilibrado, haciendo uso del modelo econométrico Wharton.

Estos multiplicadores, aparte de informar sobre las propiedades dinámicas del modelo estudiado, proporcionan directamente reglas prácticas de interés para los elaboradores de la política económica.

Pero los métodos anteriores pueden generalizarse para obtener otros resultados útiles en política económica. La forma más clara de plantear este enfoque es como una generalización de los multiplicadores convencionales.

En primer lugar, es posible someter la variable exógena de interés a cambios que sigan una determinada trayectoria temporal y determinar los efectos así producidos. De esta forma se pueden programar separadamente acciones políticas muy concretas y estudiarlas en profundidad. Klein (1971, p. 144), cita los siguientes ejemplos:

Klein (1969). En donde se analizan los efectos de la reducción de los impuestos sobre la renta en Estados Unidos.

Fromm y Taubman (1967); que estudian los efectos de la reducción de los impuestos sobre el comercio interior en Estados Unidos.

Klein (1968). Sobre las consecuencias del desarme y de la paz vietnamita en Estados Unidos.

Krelle (1969). Donde se analizan los efectos de la revaluación del marco de la Alemania Occidental.

Por otra parte, es posible utilizar estos procedimientos de simulación operando simultáneamente con cambios en dos o más variables exógenas, para estimar así los efectos temporales combinados de diversas medidas de política económica.

En forma diferente, la simulación numérica puede utilizarse también para obtener otros resultados de interés en política económica. Como es sabido, existen parámetros que dependen de las condiciones institucionales sobre las que se puede actuar. Por simulación numérica es posible analizar los efectos de cambios en tales parámetros.

Para valorar convenientemente la utilidad de esos procedimientos en *política económica,* comentaremos brevemente las tres formas de usar los modelos macroeconómicos que se han propuesto a tal fin: el enfoque de Theil, el de Tinbergen y el enfoque de simulación.

En los tres casos se parte de la información que proporciona un sistema estimado tal y como el [28]. Las variables predeterminadas se consideran divididas en tres grupos: las endógenas retardadas, las variables instrumento y las exógenas sobre las que no existe control.

El enfoque de Theil parte de la hipótesis de que se conoce la función de bienestar social, *W,* expresada en función de los objetivos (variables endógenas) e instrumentos. En esta situación, el problema del elaborador de la política económica se define como el de hallar los valores de los objetivos e instrumentos que maximicen *W,* sujeta a las restricciones que impone el sistema estimado. Este enfoque es evidentemente muy limitado en la práctica por cuanto en la realidad la función de bienestar social es desconocida.

El enfoque de Tinbergen parte del conocimiento de unos objetivos, concretados en valores de cada una de las variables endógenas. Frente a éstas existe un conjunto de variables instrumento que son las incógnitas. Para valores dados del resto de las variables exógenas, se resuelve el sistema en las variables instrumento. Se pueden presentar dos tipos de problemas según que el número de incógnitas (instrumentos) sea superior o sea inferior al de ecuaciones. En el primer caso se pueden fijar arbitrariamente un conjunto de instrumentos «sobrantes» y resolver el sistema para el resto. En el segundo caso hay que reducir el número de variables objetivo hasta igualar el número de ecuaciones y el de incógnitas.

Según Naylor (1971, p. 214), a quien estamos siguiendo en estas líneas, el enfoque de Tinbergen es adecuado en países tales como Holanda o la India, en donde la planificación económica es de aceptación general. Pero en países como Estados Unidos no es concebible que un político pueda especificar un conjunto de objetivos económicos muy concretos. En este caso el enfoque de simulación es más apto.

Bajo el enfoque de simulación se pueden generar trayectorias temporales de las variables endógenas (objetivos) ensayando cambios en las variables instrumento. Sólo hace falta conocer dos cosas: qué variables objetivo son de interés para el político, y qué conjunto de variables son instrumentos factibles de política económica. Con estos datos se puede mostrar al político los efectos temporales de medidas concretas. Éste tomará la decisión de acuerdo con sus preferencias.

Hay otros campos de aplicación de estos procedimientos de simulación, diferentes del de la política económica.

La simulación se viene aplicando con objeto de intentar reconstruir y reorientar la *historia*. Así, por ejemplo, Klein (1966) y Norman (1969), analizan la crisis de 1929 haciendo uso de modelos econométricos y de experimentos de simulación para ver si la gran depresión se pudo evitar o mitigar. Estos estudios ayudan a conocer si es o no verosímil que la historia se repita.

En Econometría, los métodos de simulación se aplican en las siguientes áreas de problemas: *a*) predicción, *b*) evaluación de diversos métodos de estimación (bajo el criterio de mejores predicciones) y *c*) la obtención de estimaciones que se basan en la minimización de los errores de predicción de los modelos dinámicos.

El uso creciente de las técnicas de simulación es bastante reciente. Los econometras han venido dedicando su atención a problemas relacionados con la inferencia estadística en los modelos; ésta es la razón por la que se han descuidado una serie de problemas relacionados con la aplicación de las técnicas de simulación. No es finalidad de este trabajo contemplar problemas tan específicos. El lector interesado puede consultar a Naylor (1971).

Para acabar, queremos resaltar el hecho de que gran parte de los progresos obtenidos recientemente en el área de los problemas que hemos tratado, han sido posibles gracias al uso del ordenador.

Facultad de Ciencias Económicas.
Universidad de Málaga.

BIBLIOGRAFÍA

ADELMAN, I., y ADELMAN, F. L. (1959): «The Dynamic Properties of the Klein-Goldberger Model», *Econometrica,* 27, 597-625.

CHRIST, C. F. (1956): «Aggregate Economic Models. A Review Article», ***Am. Ec. Rev.,*** XLVI, 388.

EVANS, M. K. (1969, *a*): «Computer Simulation of Nonlinear Econometric Models», en *The Design of Computer Simulation Experiments;* ed. Thomas H. Naylor Durham N. C., Duke University Press.

EVANS, M. K. (1969, *b*): «Reconstruction and Estimation of the Balanced Budget Multiplier», *Rev. Econ. Statist.,* 51, 14-25.

FRISCH, R. (1933): «Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics», en *Economic Essays in Honor of Gustav Cassel,* Allen and Unwin, Londres. También en: GORDON, R. A., y KLEIN, L. R. (1965) (ed.), *Readings in Business Cycles,* Irwin & Sons, Momewood.

FROMM, G., y TAUBMAN, P. J. (1967): *Policy Simulations with an Econometric Model,* Brookings, Washington.

GLAISTER, S. (1972): *Mathematical Methods for Economists,* Gray-Mills, Londres.

GOLDBERGER, A. S. (1959): *Impact Multipliers and Dynamic Properties of the Klein-Goldberger Model,* North-Holland, Amsterdam.

HICKMAN, B. (ed.) (1972): *Econometric Models of Cyclical Behavior,* Columbia University Press.

HOWREY, E. P. (1971): «Stochastic Properties of the Klein-Goldberger Model», *Econometrica,* 39, 73-87.

— (1969): «Dynamic Properties of a Condensed Version of the Warton Model». Comunicación presentada en la «Income Wealth Conference», noviembre.

HOWREY, E. P., y KLEIN, L. R (1972): «Dynamic Analysis of Nonlinear Econometric Models», *Int. Econ. Rev.,* 13, 599-618.

KLEIN, L. R. (1966): «On the possibility of another '29». Comunicación presentada en la Conferencia on the Economic Outlook, Ann Arbor, Michigan.

— (1968): «Economic consecuences of Vietnam Peace», *Wharton Quarterly* (Summer), 20-23.

— (1969): «Econometric Analysis of the Tax Cut of 1964», en ***The Brookings Model: Some Further Results.*** Duesenberry et al., Rand McNally, Chicago.

— (1971, I): «Forecasting and Policy Evaluation Using Large Scale Econometric Models: the State of the Art», en INTRILIGATOR, M. D., *Frontiers of Quantitative Economics,* North-Holland.

— (1971, II): *An Essay on the Theory of Economic Prediction*, Merkhan, Chicago.

— (1974): *A Textbook of Econometrics,* Second Ed., Prentice Hall, INC. Nueva Jersey.

KLEIN, L. R., y EVANS, M. K. (1969): *Econometric Gaming,* MacMillan, Nueva York.

KLEIN, L. R., y GOLDBERGER, A. S. (1955): *An Econometric Model of the United States, 1929-1952,* North-Holland, Amsterdam.

KRELLE, W. (1969): «The Functionning of a Pronostication Model for the West German Economy», Comunicación presentada en Project UNK Meetings.
NAYLOR, T. H. (1971): «Policy Simulation Experiments with Macro-econometric Models: The State of the Art», en INTRILIGATOR, M. D. (ed.), *Frontiers of Quantitative Economics,* North-Holland.
NORMAN, M. (1969): «The Great Depression and what Might Have Been: An Econometric Model Simulation Study», tesis doctoral, Penn. University.
OTERO, J. M. (1974): «Una generalización del modelo de ajuste de estado para el análisis de la demanda, y aplicaciones», trabajo sin publicar.
SLUTSKY, E. (1937): «The Summation of Random Causes as a Source of Cyclic Processes», *Econometrica,* 5, 105-146.
SUITS, D. B. (1962): «Forecasting and Analysis with an Econometric Model», *Am. Ec. Rev.,* 52, 104-132.
THEIL, H. (1966): *Applied Economic Forecasting,* North-Holland.
THEIL, H., y BOOT, J. C. G. (1962): «The Final Form of Econometric Equations Systems», *Rev. Int. Statist. Inst.,* 30, 136-152.
THOMAS, L. R., y STONEY, P. J. M. (1970): «A Note on the Dynamic Properties of the Hines Inflation Model», *Rev. Econ. Studies,* 37, 286-294.
TINBERGEN, J. (1939): *Statistical Testing of Business Cycle Theories,* vol. II: *Business Cycle in the United States of America 1919-1932,* Liga de las Naciones, Ginebra.
WALLIS, K. F. (1973): *Topics in Applied Econometrics,* Gray-Mills, Londres.
WYNN, R. F., y HOLDEN, K. (1974): *An Introduction to Applied Econometric Analysis,* MacMillan, Londres.